

# 时间有限元的算法稳定性与周期延长率分析\*

周宇, 汪利, 刘祚秋

中山大学航空航天学院应用力学与工程系, 广东 深圳 518107

**摘要:** 时间有限元法因其严格的先验误差界、计算误差不随时间扩散等特性而被应用于结构动力求解。文章分析了时间有限元法的算法稳定性和周期延长率。算法稳定性由时间有限元的传递矩阵的谱半径控制, 当谱半径小于 1 时, 时间有限元具有长时间的稳定性。而周期延长率作为计算周期与理论周期的相对误差, 其值越大, 意味着长时间响应的不可预测性越高。分析结果表明, 对于有阻尼系统 (阻尼比大于 0.05%), 当时间步长小于周期时, 算法的谱半径小于 1; 而对于无阻尼系统 (阻尼比小于 0.05%), 当时间步长小于 0.3 倍周期时, 算法呈现条件稳定。另一方面, 算法的周期延长率几乎为 0, 意味着时间有限元的计算结果不会发生周期漂移。最后, 将时间有限元应用于梁的动力分析, 验证了算法在精度上的优势。

**关键词:** 时间有限元; 稳定性分析; 周期延长率

**中图分类号:** O325 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2022)03-0110-06

## Analysis of algorithm stability and period elongation of time finite element

ZHOU Yu, WANG Li, LIU Zuqiu

*Department of Applied Mechanics and Engineering, School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China*

**Abstract:** The time finite element method is used to solve structural dynamics because of its strict prior error bounds and the characteristics of calculation error do not spreading over time. This paper mainly analyzes the algorithm stability and period elongation of the time finite element method. The stability of the algorithm is controlled by the spectral radius of the time finite element transfer matrix. When the spectral radius is less than 1, the time finite element has long-term stability. The period elongation is the relative error between the calculation period and the theoretical period. The larger the value, the higher the unpredictability of the long-term response. The analysis results show that for a damped system (damping ratio is greater than 0.05%), when the time step is less than the period, the spectral radius of the algorithm is less than 1. For undamped systems (or damping ratio is less than 0.05%), when the time step is less than 0.3 times of the period, the algorithm is conditionally stable. On the other hand, the period elongation of the algorithm is almost 0, which means that the calculation of time finite element will not cause period drift. Finally, the application of the time finite element to the dynamic analysis of the beam verifies the advantages of the algorithm in accuracy.

**Key words:** time finite element; analysis of stability; period elongation

\* 收稿日期: 2020-09-17 录用日期: 2020-11-02 网络首发日期: 2021-07-12

基金项目: 国家自然科学基金 (11702336)

作者简介: 周宇 (1995 年生), 男; 研究方向: 时间有限元结构动力分析; E-mail: zhouy243@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 刘祚秋 (1965 年生), 男; 研究方向: 计算力学; E-mail: eeslzq@mail.sysu.edu.cn

时间有限元法是一种在时间域内用有限单元离散的 Galerkin 算法。时间有限元法的发展可追溯到 20 世纪 60 年代末, 时间有限元法一词最早于 20 世纪 70 年代被 Clough 提出<sup>[1]</sup>, Fried 及 Argyris 等最早作了这方面的工作<sup>[2]</sup>。时间有限元法由于其精度高、计算量适中等特点, 在结构动力响应的数值分析领域得到了广泛应用。

在算法研究领域, Hulbert<sup>[3]</sup>建立了结构动力学方程的时间不连续 Galerkin 有限元法, 并证明了算法的稳定性和收敛性。随后 Li 和 Wiberg<sup>[4]</sup>研究了时间不连续 Galerkin 有限元方法, 提出了一种新的迭代求解算法。French 等<sup>[5-6]</sup>为求解二阶波动方程问题, 提出了一种时间连续 Galerkin 有限元方法。袁晓彬等<sup>[7]</sup>采用加权残值 Galerkin 法, 建立了求解一阶线性微分方程组的全域时间有限元法。许伟等<sup>[8]</sup>基于五次 Hermite 插值函数, 构造了求解结构动力学二阶线性微分方程组的全域时间有限元算法。就在最近, Wang 和 Zhong<sup>[9]</sup>构造出与传统的强控制方程形式等价的变分公式, 以此建立了时间连续 Galerkin 有限元公式。

在算法实际应用方面, 张方等<sup>[10]</sup>建立了动载荷识别的时间有限元模型, 将时间有限元法应用到动载荷识别领域。荣吉利和李瑞英<sup>[11]</sup>用时间不连续 Galerkin 法对水轮发电机轴系横向振动响应进行了仿真计算。隋永枫等<sup>[12]</sup>将时间有限元法扩展到陀螺系统, 证明了算法的优越性。姜燕等<sup>[13]</sup>用时间有限元预测了铣削的稳定性, 并用实验证明了时间有限元的有效性。

在作者最近的工作<sup>[9]</sup>中, 已经给出了时间有限元严格的先验误差分析, 并且发现与常规的 Newmark 法不同的是, 时间有限元的计算误差不会随时间逐渐增大。这对工程计算十分重要, 因为大部分算法中计算时间越长、误差越大。为了将时间有限元应用于工程分析, 本文将进一步研究时间有限元的算法稳定性与周期延长率等, 并通过梁的动力分析算例验证算法的精度。

## 1 时间有限元算法原理

在结构动力分析中, 需要求解二阶常微分方程组

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad t \in I_T = (0, T),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{C}$  为粘滞阻尼矩阵,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵,  $\mathbf{f}$  为荷载向量,  $T$  为计算的时间长度,  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}$  分别为位移、速度,  $I_T$  为时域区间。

假设外载荷  $\mathbf{f} \in L^2(I_T)$ , 它的试空间  $H_{00}^2(I_T)$  定义为

$$H_{0p}^2(I_T) = \left\{ \mathbf{u} \in H^2(I_T) : \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \right\},$$

$$H_{00}^2(I_T) = \left\{ \mathbf{u} \in H^2(I_T) : \mathbf{u}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = 0 \right\}, \quad (2)$$

其中  $L^2(I_T)$  表示在区间上平方可积的函数,  $H^2(I_T)$  表示二阶导数平方可积函数。然后, 建立结构动力问题的变分公式

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in H_{0p}^2(I_T), \quad (3)$$

其中双线性泛函  $B: H^2(I_T) \times H^2(I_T) \rightarrow \mathbf{R}$  和线性泛函  $l: H^2(I_T) \rightarrow \mathbf{R}$  表示为

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^T \int_0^s \mathbf{v}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u}) dt ds$$

$$= \int_0^T (T-t) \mathbf{v}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u}) dt,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_0^T \int_0^s \mathbf{v}^T \mathbf{f} dt ds = \int_0^T (T-t) \mathbf{v}^T \mathbf{f} dt. \quad (4)$$

在时间有限元分析中, 离散得到具有特征网格大小的有限时间节点  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , 并令  $\tau = \max\{t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N\}$ 。记  $H_{0p,\tau}^2(I_T)$  和  $H_{00,\tau}^2(I_T)$  分别为  $H_{0p}^2(I_T)$  和  $H_{00}^2(I_T)$  的有限维子空间, 由于需要满足  $C^1$  连续性, 通常在每一个单元中采用多项式插值。给定第  $i$  个单元由区间  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ , 采用三次 Hermite 插值函数在时间单元得到近似位移响应为

$$\mathbf{u}_\tau = H_1 \mathbf{u}_{i-1} + H_2 \frac{\tau_i}{2} \dot{\mathbf{u}}_{i-1} + H_3 \mathbf{u}_i + H_4 \frac{\tau_i}{2} \dot{\mathbf{u}}_i = H^i \{\mathbf{u}\}^i, \quad (5)$$

其中

$$H_1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad H_2(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi),$$

$$H_3(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad H_4(\xi) = -\frac{1}{4}(1+\xi)^2(1-\xi),$$

$$\xi = -1 + \frac{2}{\tau_i}(t - t_{i-1}) \in [-1, 1]. \quad (6)$$

有了位移响应函数, 根据变分公式建立时间有限元方程

$$B(u_\tau, v_\tau) = l(v_\tau), v_\tau \in H_{00,\tau}^2(I_\tau). \quad (7)$$

变分公式的具体推导过程以及时间有限元法的收敛性分析可参考文献 [9]。然后, 计算单元刚度矩阵  $D^i$  和荷载向量  $\{f\}^i$

$$D^i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (T-t)(\dot{H}^i)^T (M\ddot{H}^i + C\dot{H}^i + KH^i) dt, \\ \{f\}^i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (T-t)(\dot{H}^i)^T f dt. \quad (8)$$

实际中, 常采用高斯求积法计算  $D^i$  和  $\{f\}^i$ , 最后通过组装得到整体代数方程

$$D\{u\} = \{f\}. \quad (9)$$

由于  $D$  是三阶对角块矩阵, 在已知初始位移和速度的情况下, 可用追赶法快速求解方程 (9)。

## 2 算法的稳定性与周期延长率分析

### 2.1 稳定性分析

为分析时间有限元法的算法稳定性, 针对自由振动问题 (荷载  $f(t) = 0$ ) 建立的递推公式为 [14]

$$\begin{Bmatrix} u(T) \\ v(T) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

其中  $A$  为传递矩阵, 要保证算法稳定, 需满足

$$\rho(A) = \max(|\lambda(A)|) \leq 1, \quad (11)$$

其中  $\rho(A)$  为谱半径,  $\lambda(A)$  为传递矩阵的特征值。

传递矩阵  $A$  可通过如下过程简单构造, 即分别取两种不同的初始条件进行时间有限元法求解, 然后取  $T$  时刻的位移和速度合并为一个矩阵, 这个矩阵就是传递矩阵  $A$ 。具体如下: 考虑荷载  $f(t) = 0$ , 首先令初始状态为  $u_0 = 1, v_0 = 0$ , 可用时间有限元法求得  $T$  时刻的位移和速度向量  $x_1 = \begin{Bmatrix} u(T) \\ v(T) \end{Bmatrix}$ , 然后变初始状态为  $u_0 = 0, v_0 = 1$ , 同样可得  $T$  时刻的位移和速度向量  $x_2$ , 最后得到传递矩阵

$$A = (x_1 \ x_2). \quad (12)$$

### 2.2 周期延长率

当系统存在一定的周期延长时, 计算响应与实际响应将在长时间后存在周期错配, 使得长期行为难以预测。周期延长率的计算公式为 [15]

$$PE = (T' - T)/T, \quad (13)$$

式中  $T$  为体系的理论自振周期;  $T'$  为数值解的振动周期。

实际分析中, 得到的数值解并不是完美的简

谐函数, 如何获得数值解的周期是计算周期延长率的关键。采用随机子空间法 [16], 根据离散的位移数据直接找出周期。首先, 对时间有限元的解插值得到间隔为  $\Delta t$  的位移值  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ 。然后, 利用离散的位移值, 构造一个 Hankel 矩阵, 即

$$H_{n \times m} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \cdots & \bar{u}_m \\ \bar{u}_2 & \bar{u}_3 & \cdots & \bar{u}_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{u}_n & \bar{u}_{n+1} & \cdots & \bar{u}_{m+n-1} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中  $m+n$  为时间节点总个数。对矩阵  $H$  进行奇异值分解 (SVD), 得 [17]

$$H = \sum_{i=1}^r S_i U_i V_i^T, \quad (15)$$

其中  $S_i$  为  $H$  的奇异值,  $r$  为  $H$  的秩。根据随机子空间识别理论 [16], 得到离散系统特征矩阵  $Q$ , 对  $Q$  进行特征值分解, 得到特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。最终, 可得到离散数据的频率或周期

$$f' = |\ln \lambda_i| / (2\pi\Delta t), \quad T' = 1/f'. \quad (16)$$

## 3 算例验证

考虑如下单自由度体系的自由振动问题

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = 0, \quad (17)$$

其中  $\xi$  为阻尼比,  $\omega_n$  为自振频率,  $T_n = 2\pi/\omega_n$  为系统周期, 计算时长  $T=12$  s。

一方面, 进行算法的稳定性分析。主要考虑时间步长  $\tau$ , 阻尼比  $\xi$ , 周期  $T_n$  (或频率) 等因素的影响: 1) 固定  $\tau = 0.25$  s, 阻尼比  $\xi=0\sim 1\%$  和不同周期  $T_n$  下, 传递矩阵谱半径随步长周期比 ( $\tau/T_n$ ) 的变化见图 1; 2) 固定  $\tau = 0.5$  s, 阻尼比  $\xi=0\sim 1\%$  和不同周期  $T_n$  下, 传递矩阵谱半径随  $\tau/T_n$  的变化见图 2。可以看出, 阻尼比  $\xi$  和  $\tau/T_n$  显著影响谱半径的值; 而给定  $\xi$  和  $\tau/T_n$ , 谱半径几乎与时间步长  $\tau$  没有关系。当存在阻尼 ( $\xi > 0.05\%$ ) 时, 谱半径在合理的步长周期比范围 ( $\tau/T_n < 1$ ) 内小于 1, 表明时间有限元计算是稳定的; 而对于无阻尼或  $\xi < 0.05\%$  的系统, 只有当  $\tau/T_n < 0.3$  时, 谱半径小于 1, 此时属于条件稳定状态。

另一方面, 为了研究时间有限元法的周期延长率, 令阻尼比  $\xi$  为 0, 且固定系统周期为  $T_n = 4$ 。考虑系统的初始位移为 1、初始速度为 0, 此时位移响应的解析解为  $u(t) = \cos(\pi t/2)$ 。时间有限元法得到的计算结果见图 3。从图中可以看出, 改变时

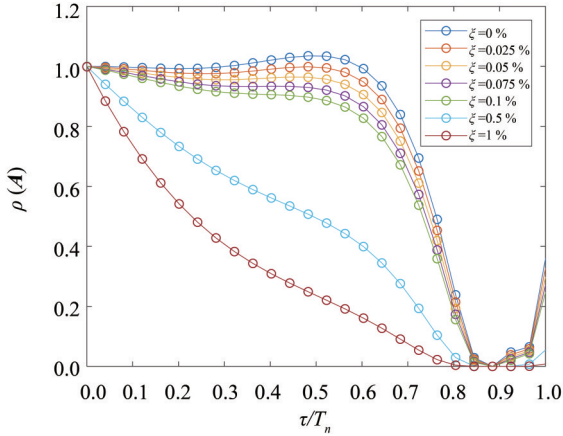


图1  $\tau=0.25$ 时谱半径随阻尼比 $\xi$ 和 $\tau/T_n$ 的变化  
Fig. 1 Variation of spectral radius with damping ratio  $\xi$  and  $\tau/T_n$  under  $\tau=0.25$

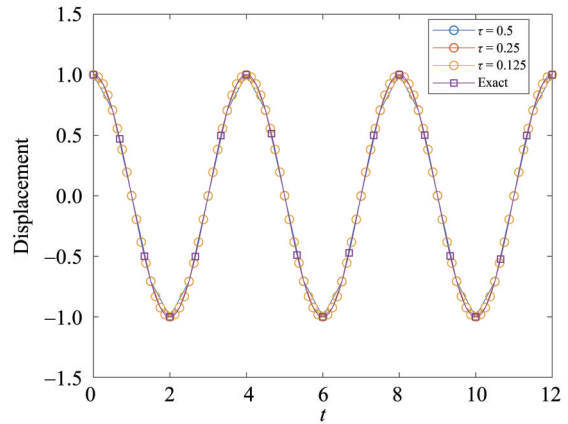


图3 不同时间步长时单自由度无阻尼自由振动系统的位移响应

Fig. 3 Displacement response of single degree of freedom undamped vibration system with different time steps

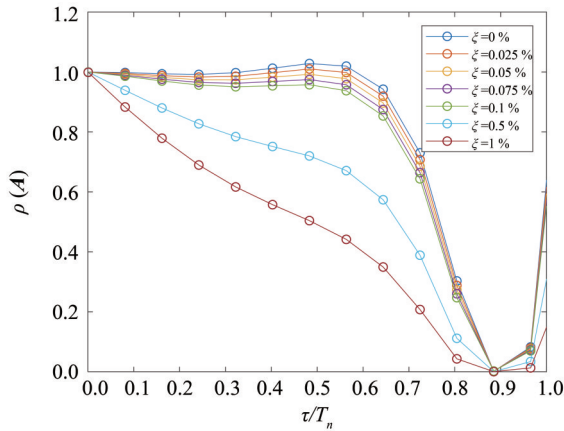


图2  $\tau=0.5$ 时谱半径随阻尼比 $\xi$ 和 $\tau/T_n$ 的变化  
Fig. 2 Variation of spectral radius with damping ratio  $\xi$  and  $\tau/T_n$  under  $\tau=0.5$

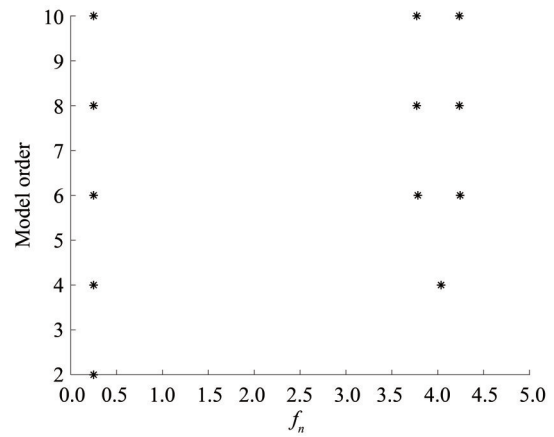


图4 随机子空间法的稳定图

Fig. 4 Stabilization diagram of stochastic subspace identification

间步长基本不影响体系的计算振动周期, 且计算振动周期与理论自振周期基本一致。为了对周期延长率进行定量分析, 用随机子空间法得到计算数值解的工程频率 $f_n$ , 画出稳定图, 如图4所示。可以看出, 当模型阶次为2时, 随机子空间法便能得到满意的频率结果(接近0.25)。按照此思路, 改变时间步长, 取模型阶次为2, 可得到周期延长率PE随时间步长的变化曲线, 如图5所示。从图中可以看出, 不同时间步长下, 周期延长率几乎为0(全小于0.01), 表明时间有限元不会改变解的周期, 在长时间计算中, 不会引起周期错配。

#### 4 应用于梁的振动分析

考虑承受集中荷载的等截面简支梁模型(如图6所示)。荷载距左端支座的距离为 $s$  ( $s=L/4$ ), 大小为 $P(t) = F\sin(\omega t)$ 。研究的响应时间区间为

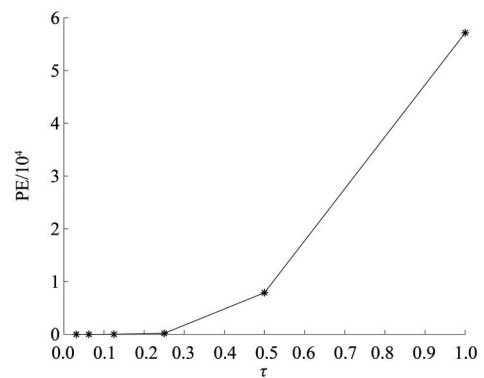


图5 周期延长率随时间步长的变化

Fig. 5 Change trend of period elongation with time step

[0, 12], 模型的基本参数是: 质量分布  $m = 1000$  kg/m, 梁长  $L = 10$  m, 弹性模量  $E = 3 \times 10^9$  Pa, 截面惯性矩  $I = 6 \times 10^{-7}$  m<sup>3</sup>, 外荷载激振频率  $\omega = \pi/2$  rad/s 以及荷载幅值  $F = 1000$  N。梁的初始横向

位移和转角均设为0。为了建立梁的动力方程,首先对梁进行离散化,均匀划分为8个单元。选取结点的横向位移和转角为自由度,单元刚度矩阵为

$$K_e = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

式中  $l$  是单元长度。类似的,单元质量矩阵为

$$M_e = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

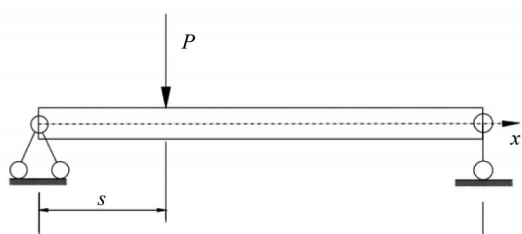


图6 受集中荷载的等截面简支梁模型  
Fig. 6 Model of a beam with equal section under concentrated load

将单元刚度矩阵、质量矩阵和外力向量进行组装,集成结构体系的总体刚度矩阵  $K$ 、质量矩阵  $M$  和外力荷载向量  $f(t)$ ,再采用阻尼理论假设得到体系的总体阻尼矩阵  $C$ ,形成如式(1)的梁振动方程。然后,采用时间有限元法进行求解。

取跨中节点的横向位移为研究对象,可以得到跨中节点的横向位移的时间有限元解,如图7所示。从图中可以看出时间有限元的数值解与方程的解析解十分吻合。当然,为了对比,额外应用Newmark法( $\gamma=0.5, \beta=0.25$ )对该问题进行求解。时间步长  $\tau=1/8$  下,时间有限元和Newmark法在所有时间节点上位移和速度的逐点误差如图8和图9所示。从图中可以看出,时间有限元法的逐点误差明显比Newmark法小。Newmark法的误差会随着时间增加,而时间有限元的逐点误差却一直保持在较低的水平。

为了量化计算误差,将时间有限元和Newmark法的位移和速度响应中的最大误差分别列于表1和表2中。可以看出,相同时间步长下,时间有限元法位移的最大误差仅为Newmark法的6.67%~9.6%,速度误差不超过Newmark法的5.78%。时间有限元法的精度显然比Newmark法高。

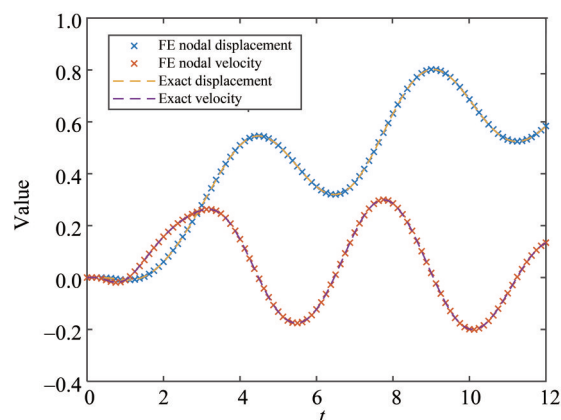


图7  $\tau=1/8$  时间有限元求解的跨中节点  
横向位移和速度响应

Fig. 7 Transverse displacement and velocity response of mid-span nodes solved by time finite element under  $\tau=1/8$

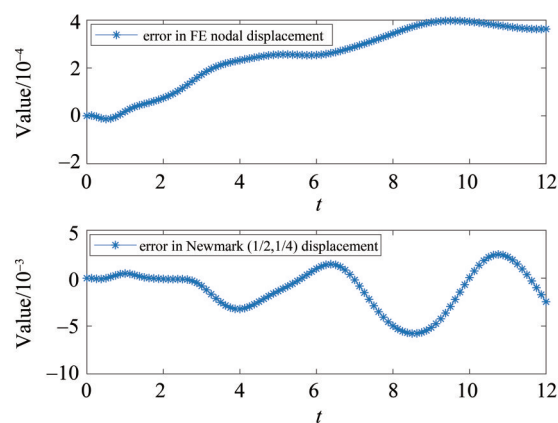


图8 时间有限元法和Newmark法的位移误差对比  
Fig. 8 Comparison of errors in pointwise displacement by time FEM and Newmark method

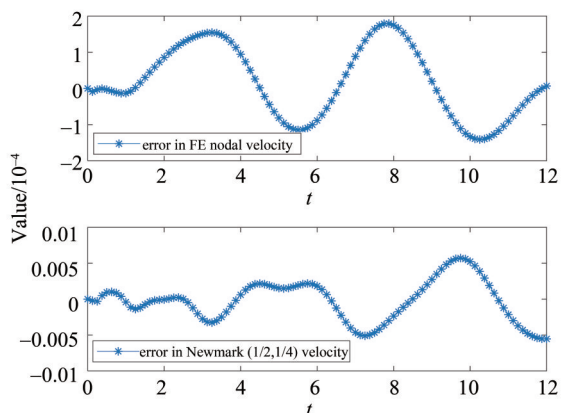


图9 时间有限元法和Newmark法的速度误差对比  
Fig. 9 Comparison of errors in pointwise velocity by time FEM and Newmark method

表1 时间有限元和Newmark法跨中位移的最大误差  
Table 1 Maximum error in mid-span displacement  
of time finite element and Newmark method

$\tau$	时间有限元	Newmark法	误差比/%
1	0.028 2	0.293 8	9.6
1/2	0.006 5	0.090 6	7.17
1/4	0.001 6	0.023 0	6.96
1/8	0.000 4	0.005 8	6.9
1/16	0.000 1	0.001 5	6.67

表2 时间有限元和Newmark法跨中速度的最大误差  
Table 2 Maximum error in mid-span velocity  
of time finite element and Newmark method

$\tau$	时间有限元	Newmark法	误差比/%
1	0.012 5	0.216 4	5.78
1/2	0.002 9	0.081 2	3.57
1/4	0.000 7	0.021 5	3.26
1/8	0.000 2	0.005 7	3.51
1/16	0.000 0	0.001 4	<3.57

## 5 结 论

本文研究了时间有限元法的算法稳定性和周期延长率问题, 得到了以下结论:

1) 对于有阻尼(阻尼比大于0.05%)单自由度系统, 当 $\xi$ 和 $\tau/T_n < 1$ 取不同值时, 谱半径 $\rho(\mathbf{A})$ 都始终小于1, 表明时间有限元法的稳定性很好。对于无阻尼(或者阻尼比小于0.05%)单自由度

系统,  $\tau/T_n < 0.3$ 时系统达到条件稳定。

2) 时间有限元法的周期延长率(几乎)为0, 可以认为计算振动周期等于理论自振周期, 不存在周期延长的现象。

3) 时间有限元法在求解多自由度线性系统的动力反应问题时, 其计算精度要远高于一般的Newmark法。

## 参考文献:

- [1] 杨昌棋, 刘成群. 求解动力响应的时间有限元法[J]. 振动与冲击, 1987(4):73-79.
- [2] 于开平, 邹经湘. 时间域有限元法[J]. 力学进展, 1998, 28(4):461-468.
- [3] HULBERT G M. Time finite element methods for structural dynamics [J]. Int J Numer Methods Eng, 1992, 33:307-331.
- [4] LIX D, WIBERGN E. Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin finite element method [J]. Int J Numer Methods Eng, 1996, 39:2131-2152.
- [5] FRENCHD A, SCHAEFFER J W. Continuous finite element methods which preserve energy properties for nonlinear problems [J]. Appl Math Comput, 1991, 39: 271-295.
- [6] FRENCHD A, PETERSONT E. A continuous space-time finite element method for the wave equation [J]. Math Comput, 1996, 65:491-506.
- [7] 袁晓彬, 董江峰, 邱慈长, 等. 结构动力响应的时间有限元全域算法[J]. 应用力学学报, 2010, 27(3): 579-583.
- [8] 许伟, 袁晓彬, 谭莲飞, 等. 基于五次 Hermite 插值的时间有限元全域算法求解结构动力响应[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2011, 43(3):39-43.
- [9] WANG L, ZHONG H Z. A time finite element method for structural dynamics [J]. Appl Math Model, 2017, 41:445-461.
- [10] 张方, 朱德懋, 张福祥. 动载荷识别的时间有限元模型理论及其应用[J]. 振动与冲击, 1998, 17(2): 1-4.
- [11] 荣吉利, 李瑞英. 水轮发电机轴系横向振动响应的有限元法[J]. 北京理工大学学报, 2001, 21(5):553-557.
- [12] 隋永枫, 高强, 钟万勰. 陀螺系统时间有限元方法[J]. 振动与冲击, 2012, 31(13):95-98.
- [13] 姜燕, 郭强, 赵波. 铣削稳定性预测的时间有限元法[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2016, 35(5): 672-676.
- [14] 陈玲莉. 工程结构动力分析数值方法[M]. 西安:西安交通大学出版社, 2006.
- [15] 刘祥庆, 刘晶波, 丁桦. 时域逐步积分算法稳定性与精度的对比分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(增刊1):3000-3008.
- [16] 刘洋, 田石柱. 基于随机子空间的结构参数识别及振动台试验验证[J]. 地震工程与工程振动, 2004, 24(2):111-117.
- [17] 郭利荣. 基于奇异值分解的强单频干扰自动识别与消除[J]. 江汉石油职工大学学报, 2019, 32(4): 11-13.